

การวิเคราะห์ความแข็งแรงโครงสร้างคานวัสดุผสมโดยพิจารณาวิธีความแข็งเกร็งหน้าตัดขวางกับวิธี
พลังงานของ Rayleigh-Ritz

Structural Analysis of Composite Beams due to Applying the Cross-Sectional Stiffness of the Beam
with Energy Method of Rayleigh-Ritz

นัตรัฐ คุ้มผาติ และบุญชัย วัจจะตรากุล

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลและการบิน-อวกาศ คณะ วิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ กรุงเทพฯ 10800

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์การเสถียรของคานวัสดุผสมผนังบางที่มีหน้าตัดขวางแบบตัวไอและแบบกล่องสี่เหลี่ยม โดยพิจารณาวิธีความแข็งเกร็งหน้าตัดขวางกับวิธีพลังงานของ Rayleigh-Ritz ซึ่งสามารถนำไปพัฒนาการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างวัสดุผสม อาทิเช่น โครงสร้างอากาศยาน ใบพัดกังหันลม ใบพัดกังหันน้ำ ฯลฯ ต่อไป วิธีการศึกษาโดยการคำนวณหาความแข็งของหน้าตัดขวางของคานผนังบางโดยใช้วิธี C continuous formulation ซึ่งได้พิจารณาผลของการเสถียรเนื่องจากการบิดตัวของคานผนังบาง และทำการวิเคราะห์การเสถียรของคานวัสดุผสมผนังบางนี้ด้วยวิธีพลังงานของ Rayleigh-Ritz เปรียบเทียบกับการวิเคราะห์ด้วยวิธี Finite Element ซึ่งพิจารณารวมผลของการเสถียรเนื่องจากแรงเฉือนตามแนวขวาง โดยนำเสนอตัวอย่างการศึกษาวิเคราะห์ด้วยคานผนังบางที่มีหน้าตัดขวางแบบเปิด (คานหน้าตัดขวางแบบตัว I) และปิด (คานหน้าตัดขวางแบบกล่องสี่เหลี่ยม) ภายใต้เงื่อนไขการรับภาระที่แตกต่างกัน และเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์จากตัวอย่าง โดยผลการศึกษาสรุปลได้ว่าวิธีการพลังงานของ Rayleigh-Ritz มีความแม่นยำในการวิเคราะห์ที่ระดับหนึ่งเมื่อเทียบกับวิธี finite element แต่ผลการวิเคราะห์ยังมีความแตกต่างกัน ซึ่งเป็นผลจากกระบวนการแก้ไขปัญหของวิธีการทั้งสอง โดยประการแรกคือ การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของระบบ และประการสุดท้ายคือ การกำหนดความแม่นยำของทั้งสองวิธีด้วยจำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเสถียรและจำนวน element ของระบบ

คำสำคัญ : แยกออกเป็นชั้นๆ วัสดุผสม วิธีพลังงาน

Abstract

The objective of the study was to investigate the deformation of laminated composite structures, like those in an aircraft, wind and hydro turbine blade, which were thin-walled laminated composite beam. A beam was derived the cross-sectional stiffness with the *C continuous formulation* which is considered the effect of deformation due to incorporation of warping deformation. The analytical technique of energy method, *Rayleigh-Ritz Method*, was used to predict the deformation of thin-walled laminated composite beams, as compared with the *finite element method* which was adopted for the transverse shear deformation. The results of numerical examples with open section I and closed section box beams under different loading conditions were compared with the results of experimental examples from the reference literatures.

Keywords : laminate, composite materials, Rayleigh-Ritz method

1. บทนำ

ในการวิเคราะห์คานวัสดุผสมผนังบาง วิธีพลังงานของ Rayleigh-Ritz เป็นหนึ่งในกระบวนการวิเคราะห์การเสถียรภาพของคาน โดยเริ่มจากการตั้งสมมติฐานลักษณะการเสถียรภาพของระบบ โดยการสร้างฟังก์ชันการเสถียรภาพของคาน (displacement function) ให้สอดคล้องกับลักษณะการจับยึดและการรับภาระของคาน จากนั้นนำมาสร้างสมการพลังงานของคาน (Strain energy) ซึ่งเป็นคุณสมบัติเฉพาะของคานที่ได้รับภาระแรงภายใต้เงื่อนไขการจับยึดคานในลักษณะต่างๆ โดยในขั้นตอนการสร้างสมการพลังงานของคานจำเป็นที่จะต้องทราบค่าความแข็งแรงของหน้าตัดขวางของคาน ซึ่งเป็นคุณสมบัติเฉพาะของคานนั้นๆ ทั้งนี้สามารถหาโดยใช้สมการ C continuous formulation (Sheikh and Thomsen, 2008) ซึ่งมีที่มาจาก Laminated composite plates and shells theory จากนั้นจึงแก้สมการพลังงานเพื่อหาสัมประสิทธิ์ของสมการการเสถียรภาพของคาน และทำการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์การเสถียรภาพ

โดยวิธีพลังงานของ Rayleigh-Ritz กับวิธี finite element

2. วัตถุประสงค์

เพื่อวิเคราะห์การเสถียรภาพของคานวัสดุผสมผนังบางที่มีหน้าตัดขวางแบบตัวไอและแบบกล่องสี่เหลี่ยม โดยพิจารณาวิธีความแข็งแรงของหน้าตัดขวางกับวิธีพลังงานของ Rayleigh-Ritz ซึ่งสามารถนำไปพัฒนาการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างวัสดุผสม อาทิเช่น โครงสร้างอากาศยาน ใบพัดกังหันลม ใบพัดกังหันน้ำ ฯลฯ ต่อไป

3. อุปกรณ์และวิธีการ

ขั้นตอนหลักในการวิเคราะห์เริ่มจากการสร้างสมการพลังงานของระบบรวม ดังนี้

$$\Pi = \tilde{U} + \tilde{V} \quad (1)$$

เมื่อ \tilde{U} = Strain energy ของระบบ (จูล)

\tilde{V} = พลังงานที่เกิดจากการกระทำจากแรง

ภายนอก (จุด)

ทั้งนี้ในการจะสร้างสมการพลังงานของระบบนั้นจะต้องใช้ตัวแปรการกระจัดที่ระนาบกึ่งกลางผนังของคาน ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในพิกัดแกนหลักดังแสดงในรูปภาพที่ 1 ได้ดังนี้

$$\bar{u} = U + y\theta_y + z\theta_z + \varphi\theta_x' \quad (2)$$

$$\bar{v} = V \cos \alpha + W \sin \alpha - r\theta_x \quad (3)$$

$$\bar{w} = -V \sin \alpha + W \cos \alpha + q\theta_x \quad (4)$$

โดยที่ φ คือ สมการการบิด (Warping function)

$$\theta_y = -\frac{dV}{dx} + \Psi_y$$

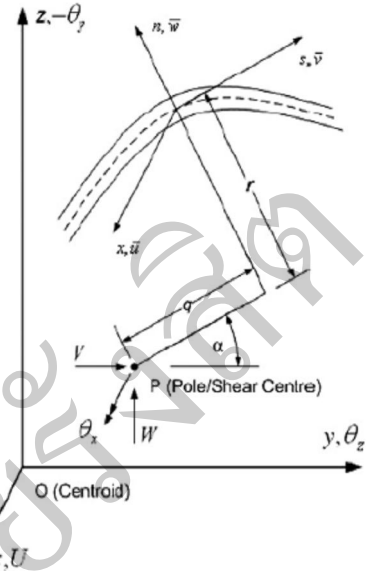
$$\theta_z = -\frac{dW}{dx} + \Psi_z$$

Ψ_y = การหมุนหน้าตัดของคานรอบแกน z

(เรเดียน)

Ψ_z = การหมุนหน้าตัดของคานรอบแกน y

(เรเดียน)



รูปภาพที่ 1 แสดงการวางแกนพิกัดและตัวแปรการกระจัดบนหน้าตัดขวางของผนังของคานวัสดุผสมผนังบาง

และตัวแปรการกระจัดบนตำแหน่งใดๆบนผนังของคานสามารถเขียนได้ดังนี้

$$u = \bar{u} + n \left(-\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \psi_{xn} \right) \quad (5)$$

$$v = \bar{v} + n \left(-\frac{\partial \bar{w}}{\partial s} + \psi_{sn} \right) \quad (6)$$

$$w = \bar{w} \quad (7)$$

สำหรับการเสีรูปเนื่องจากแรงเลื่อนตามแนวขวาง สมมติให้ $\psi_{sn} = 0$ และ

$$\psi_{xn} = -\Psi_y \sin \alpha + \Psi_z \cos \alpha \quad (8)$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (2)-(4) และสมการที่ (8) ลงในสมการที่ (5)-(7) จะได้ว่า

$$u = U + (y - n \sin \alpha)\theta_y + (z + n \cos \alpha)\theta_z + (\varphi - nq)\theta_x' \quad (9)$$

$$v = V \cos \alpha + W \sin \alpha - (r + n)\theta_x \quad (10)$$

$$w = -V \sin \alpha + W \cos \alpha + q\theta_x \quad (11)$$

เมื่อใช้สมมติฐาน Plane strain condition ($\epsilon_s = 0$) และ

Plane stress condition ($\sigma_s = 0$) จะได้ว่า

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_{xs} \\ \epsilon_{xn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \psi_{xn} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

โดยที่

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U' + (y - n \sin \alpha)\theta_y' + (z + n \cos \alpha)\theta_z' + (\varphi - nq)\theta_x'$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = \Psi_y \cos \alpha + \Psi_z \sin \alpha - \left(2n + r - \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)\theta_x'$$

$$\psi_{xn} = -\Psi_y \sin \alpha + \Psi_z \cos \alpha$$

และสามารถเขียนสมการที่ (12) ให้อยู่รูป matrix ได้ดังนี้

$$\epsilon = [H] \{\bar{\epsilon}\} \quad (13)$$

เมื่อ

$$[H]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y - n \sin \alpha & 0 & 0 \\ z + n \cos \alpha & 0 & 0 \\ \varphi - nq & 0 & 0 \\ 0 & -\left(2n + r - \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{\epsilon}\}^T = [U' \quad \theta_y' \quad \theta_z' \quad \theta_x'' \quad \theta_x' \quad V' + \theta_y \quad W' + \theta_z]$$

ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่าง stress และ strain ในแต่ละชั้นผิวของผนังกานวัสดุผสมมีดังนี้ (Reddy, 2004)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xs} \\ \sigma_{xn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{16} & 0 \\ \tilde{Q}_{16} & \tilde{Q}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_{xs} \\ \epsilon_{xn} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

เมื่อใช้สมการที่ (13) และ (14) จะได้สมการพลังงานของระบบดังนี้

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \int \{\bar{\epsilon}\}^T \{\sigma\} dv = \frac{1}{2} \int \{\bar{\epsilon}\}^T \{F\} \{\bar{\epsilon}\} dx \quad (15)$$

โดยที่ $F = \int \int \{H\}^T \{\tilde{Q}\} \{H\} ds dn = \int [C] ds$

$$\varphi = \int r ds - 2A_c \frac{\delta_s}{\delta}$$

เมื่อ $\delta_s = \int \frac{ds}{\tilde{Q}_{66}}$

$$\delta = \oint \frac{ds}{\tilde{Q}_{66}}$$

และ A_c = พื้นที่หน้าตัดขวางทั้งหมดที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นระนาบกึ่งกลางของผนังกาน (ตารางเมตร)

แต่ในคานหน้าตัดขวางแบบเปิดนั้น เราสามารถ

กำหนดให้ $\varphi = \int r ds$ เท่านั้น

พลังงานเนื่องจากแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบ

คือ

$$\tilde{V} = - \int \int (p_x U + p_y V + p_z W + T\theta_x + M_z \theta_y + M_y \theta_z) dA \quad (16)$$

เมื่อ p = แรงกระทำบนพื้นที่ผิวของระบบต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ (นิวตัน/ตารางเมตร)

T = แรงบิด (นิวตันเมตร)

M = แรงคด (นิวตันเมตร)

ในส่วนของสมมติฐานการเสีรูปของคานนั้น เรา

กำหนดลักษณะการเสีรูปตามลักษณะการจับยึดและการรับภาระแรงในคานแต่ละประเภทดังนี้

simple-simple : $w(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

clamped-clamped : $w(x) = A \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right]$

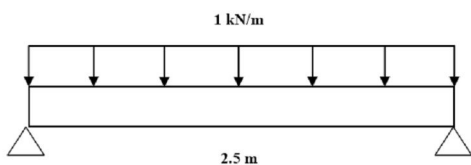
cantilevered : $w(x) = Ax^2$

โดยที่ $w(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ใช้เป็นสมมติฐาน
แทนการกระจัดและองศาการดัด (U, V, W, θ_x , θ_y , θ_z)
ที่จุด P ดังแสดงในรูปภาพที่ 1

ทฤษฎีพลังงานของ Rayleigh-Ritz มีดังต่อไปนี้
 $\frac{\partial \Pi}{\partial A_i} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial A_i} = 0$ โดยที่ $i = 1, \dots, \alpha$

4. ผลการวิจัย

ตัวอย่างที่ 1 คานรูปตัวไอยาว 2.5 m มีจุด
รองรับแบบ simple-simple และรับแรงขวางกระจายตาม
ความยาวของคานขนาด 1 kN/m ซึ่งกระทำที่ web ของ
คานรูปตัวไอ ดังแสดงในรูปภาพที่ 2 โดยที่คานมีความ
ลึก 50 mm ความกว้างของ flange 50 mm ความหนาของ
คานเท่ากันทั้ง web และ flange 2.08 mm โดยมีกรวาง
เส้นใยวัสดุในแนว $[0/0]_{4s}$ ในทุกชั้นส่วนของคาน และ
วัสดุที่ใช้มีคุณสมบัติทางกล ดังนี้ $E_1=53.78$ GPa,
 $E_2=17.93$ GPa, $G_{12}=8.96$ GPa, $G_{13}=8.96$ GPa, $G_{23}=3.45$
GPa และ $\nu_{12}=0.25$ โดยที่ผลการคำนวณและเปรียบเทียบ
การเสีรูปตามแนวคิ่งที่ความยาวกึ่งกลางของคาน และ
องศาการดัดตัวตามแนวคิ่งที่จุดจับยึดของคานรูปตัวไอ
แสดงไว้ในตารางที่ 1 และค่าการเสีรูปในแนวแกน
ต่างๆของคานรูปตัวไอ แสดงไว้ในตารางที่ 2



รูปภาพที่ 2 คานรูปตัวไอที่จับยึดแบบ simple-simple

ตารางที่ 1 ตารางเปรียบเทียบผลการคำนวณการเสีรูปตามแนวคิ่งที่
กึ่งกลางคาน และองศาการดัดตัวตามแนวคิ่งที่จุดจับยึดของคานรูปตัว
ไอที่จับยึดแบบ simple-simple

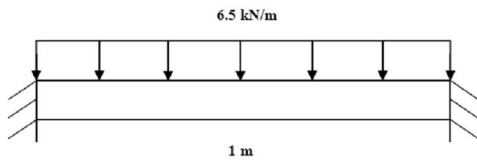
วิธีการ	W (เซนติเมตร)	θ_z (เรเดียน)
Sheikh & Thomsen (finite element)	6.264	0.0798
Lee (finite element)	6.259	
Lee & Lee (finite element)	6.233	
Rayleigh-Ritz (energy method)	5.994	0.0765

ตารางที่ 2 ตารางแสดงค่าการเสีรูปในแนวแกนต่างๆของคานรูปตัว
ไอที่จับยึดแบบ simple-simple โดยวิธีพลังงานของ Rayleigh-Ritz

ฟังก์ชันการเสีรูป องศาการดัด และการบิด	จุดจับยึดที่ ตำแหน่ง $x=0$	กึ่งกลางคาน	จุดจับยึดที่ ตำแหน่ง $x=L$
U (เซนติเมตร)	0	0	0
V (เซนติเมตร)	0	0	0
W (เซนติเมตร)	0	5.994	0
θ_x (เรเดียน)	0	0	0
θ_y (เรเดียน)	0	0	0
θ_z (เรเดียน)	0.0765	0	0.0765

ตัวอย่างที่ 2 คานหน้าตัดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยม
ยาว 1 m มีจุดรองรับแบบ clamped-clamped และรับแรง
ขวางกระจายตามความยาวของคานขนาด 6.5 kN/m ซึ่ง
กระทำที่ web ข้างใดข้างหนึ่งของคานหน้าตัดขวางรูปกล่อง
สี่เหลี่ยม ดังแสดงในรูปภาพที่ 3 โดยที่คานมีความลึก 70
mm ความกว้างของ flange 50 mm ความหนาของคาน
เท่ากันทั้ง web และ flange 2 mm โดยมีกรวางเส้นใยวัสดุ
ในแนว $(45/-45)_2/(0/0)_6/(45/-45)_2$ ในทุกชั้นส่วนของคาน
และวัสดุที่ใช้มีคุณสมบัติทางกล ดังนี้ $E_1=148$ GPa, $E_2=9.65$

GPa, $G_{12}=G_{13}=G_{23}=4.55$ GPa และ $\nu_{12}=0.3$ โดยที่ผลการคำนวณและเปรียบเทียบการเสยรูปตามแนวตั้ง และองศาการบิดตัวที่ความยาวกึ่งกลางของคานารูปกล่องสี่เหลี่ยม แสดงไว้ในตารางที่ 3 และค่าการเสยรูปในแนวแกนต่างๆของคานารูปกล่องสี่เหลี่ยม แสดงไว้ในตารางที่ 4



รูปภาพที่ 3 คานาน้ำตัดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยมที่จับยึดแบบ clamped-clamped

ตารางที่ 3 ตารางเปรียบเทียบผลการคำนวณการเสยรูปตามแนวตั้ง และองศาการบิดตัวที่กึ่งกลางคานาน้ำตัดขวางรูปกล่องสี่เหลี่ยมที่จับยึดแบบ clamped-clamped

วิธีการ	W (มิลลิเมตร)	θ_x (เรเดียน)
Sheikh & Thomsen (finite element) $G_{12}=G_{13}$	0.7811	0.0067
Sheikh & Thomsen (finite element) $G_{12}=G_{13}=G_{23}$	0.4940	0.0067
Vo & Lee (finite element)	0.4940	0.0064
Rayleigh-Ritz (energy method)	0.4546	0.0055

ตารางที่ 4 ตารางแสดงค่าการเสยรูปในแนวแกนต่างๆของคานารูปกล่องสี่เหลี่ยมที่จับยึดแบบ clamped-clamped โดยวิธีพลังงานของ Rayleigh-Ritz

ฟังก์ชันการเสยรูป องศาการบิด และกาบิด	จุดจับยึดที่ ตำแหน่ง $x=0$	กึ่งกลางคาน	จุดจับยึดที่ ตำแหน่ง $x=L$
U (มิลลิเมตร)	0	0	0
V (มิลลิเมตร)	0	0	0
W (มิลลิเมตร)	0	0.4546	0
θ_x (เรเดียน)	0	0.0055	0
θ_y (เรเดียน)	0	0	0
θ_z (เรเดียน)	0	0	0

5. การอภิปรายผล

เนื่องจากการวิเคราะห์ด้วยวิธี finite element และวิธีพลังงานของ Rayleigh-Ritz มีขั้นตอนการสร้างสมการพลังงานรวมของระบบที่เหมือนกัน แตกต่างกันในส่วนของวิธีการแก้ไขสมการพลังงานเพื่อหาคำตอบ ผลการวิเคราะห์จึงสมควรที่จะต้องมีความใกล้เคียงกัน ดังนั้นจากการวิเคราะห์ดังตัวอย่างข้างต้นพบว่า ผลการวิเคราะห์ในแต่ละตัวอย่าง มีทั้งใกล้เคียงและแตกต่างจากผลวิเคราะห์ในเอกสารอ้างอิง (Sheikh and Thomsen, 2008) ซึ่งเป็นผลจากการคำนวณโดยวิธี finite element

อย่างไรก็ตาม ความแม่นยำของผลการวิเคราะห์ด้วยวิธีพลังงานของ Rayleigh-Ritz ยังเป็นผลมาจากจำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเสยรูป (displacement function) ในขณะที่ความแม่นยำของวิธี finite element อยู่ที่การแบ่งจำนวน element ของคานาให้มีจำนวนมากขึ้น

6. บทสรุป

จากผลการวิเคราะห์ดังที่ได้แสดง จะเห็นว่าวิธีการพลังงานของ Rayleigh-Ritz มีความแม่นยำในการวิเคราะห์ระดับหนึ่งเมื่อเทียบกับวิธี finite element แต่ผลการวิเคราะห์ยังมีความแตกต่างกัน ซึ่งเป็นผลจากกระบวนการแก้ไขปัญหาของวิธีการทั้งสอง โดยประการแรกคือ การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของระบบ และประการสุดท้ายคือ การกำหนดความแม่นยำของทั้งสองวิธีด้วยจำนวนพจน์ของฟังก์ชันการเสียรูปและจำนวน element ของระบบ

อย่างไรก็ตาม เพื่อให้ผลการวิเคราะห์ด้วยวิธีการพลังงานของ Rayleigh-Ritz มีความแม่นยำตรงกับวิธี finite element จึงควรต้องทำการวิเคราะห์สาเหตุความแตกต่างทั้งสองประการข้างต้นต่อไป เพื่อจะนำวิธีการวิเคราะห์โดยใช้วิธีการพลังงานของ Rayleigh-Ritz ไปประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ความแข็งแรงโครงสร้างวัสดุผสมที่มีความซับซ้อนยิ่งขึ้น อาทิเช่น โครงสร้างอากาศยาน ใบพัดกังหันประเภทต่างๆ ฯลฯ ต่อไป

7. เอกสารอ้างอิง

- Sheikh AH, Thomsen OT. (2008). *An efficient beam element for the analysis of laminated composite beams of thin-walled open and closed cross sections*. University of Adelaide, Aalborg University.
- Lee J. (2005). *Flexural analysis of thin-walled composite beams using shear deformable beam theory*. Compos Struct.
- Reddy JN. (2004). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. 2nd ed. CRC Press.

- Lee J, Lee S. (2004). *Flexural-torsional behavior of thin-walled composite beams*. Thin Wall Struct.
- Vo TP, Lee J. (2007). *Flexural-torsional behavior of thin-walled closed-section composite box beams*. Eng Struct.